**Matrizes e Determinantes II**

1 - Definições:

1.1 - Chama-se Menor Complementar ( D ij) de um elemento aij de uma matriz quadrada A, ao determinante que se obtém eliminando-se a linha i e a coluna j da matriz.
Assim, dada a matriz quadrada de terceira ordem (3x3) A a seguir :



Podemos escrever:
D23 = menor complementar do elemento a23 = 9 da matriz A . Pela definição, D23 será igual ao determinante que se obtém de A, eliminando-se a linha 2 e a coluna 3, ou seja:



Da mesma forma determinaríamos D11, D12, D13, D21, D22, D31, D32 e D33. Faça os cálculos como exercício!

1.2 - Cofator de um elemento aij de uma matriz : cof ( aij) = (-1 ) i+j . Dij .
Assim por exemplo, o cofator do elemento a23 = 9 da matriz do exemplo anterior, seria igual a:
cof(a23) = (-1)2+3 . D23 = (-1)5 . 10 = - 10.

2 - Teorema de Laplace

* O determinante de uma matriz quadrada é igual à soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) pelos respectivos cofatores.
* Este teorema permite o cálculo do determinante de uma matriz de qualquer ordem. Como já conhecemos as regras práticas para o cálculo dos determinantes de ordem 2 e de ordem 3, só recorremos à este teorema para o cálculo de determinantes de 4ª ordem em diante. O uso desse teorema, possibilita abaixar a ordem do determinante. Assim, para o cálculo de um determinante de 4ª ordem, a sua aplicação resultará no cálculo de quatro determinantes de 3ª ordem. O cálculo de determinantes de 5ª ordem, já justifica o uso de planilhas eletrônicas, a exemplo do Excel for Windows, Lótus 1-2-3, entre outros.
* Para expandir um determinante pelo teorema de Laplace, é mais prático escolher a fila (linha ou coluna) que contenha mais zeros, pois isto vai facilitar e reduzir o número de cálculos necessários.
* Pierre Simon Laplace - (1749-1827) - Matemático e astrônomo francês.

3 - Cálculo da inversa de uma matriz.

a) A matriz inversa de uma matriz X , é a matriz X-1 , tal que X . X-1 = X-1 . X = In , onde Iné a matriz identidade de ordem n.

b) Matriz dos cofatores da matriz A: é a matriz obtida substituindo-se cada elemento pelo seu respectivo cofator.
Símbolo: cof A .

c) Fórmula para o cálculo da inversa de uma matriz:



Onde: A-1 = matriz inversa de A;
det A = determinante da matriz A;
(cof A)T = matriz transposta da matriz dos cofatores de A .

Exercícios propostos

1 - Se A = ( aij ) é matriz quadrada de ordem 3 tal que aij = i - j então podemos afirmar que o seu determinante é igual a:

\*a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) -4

2 - UFBA-90 - Calcule o determinante da matriz:



Resp: 15

3 - Considere a matriz A = (aij)4x4 definida por aij = 1 se i ³ j e aij = i + j se i < j. Pede-se calcular a soma dos elementos da diagonal secundária.
Resp: 12

4 - As matrizes A e B , quadradas de ordem 3, são tais que B = 2.At , onde At é a matriz transposta de A.
Se o determinante de B é igual a 40 , então o determinante da matriz inversa de A é igual a:

\*a) 1/5
b) 5
c) 1/40
d) 1/20
e) 20

5 - Dadas as matrizes A = (aij)3x4 e B = (bij)4x1 tais que aij = 2i + 3j e bij = 3i + 2j, o elemento
c12 da matriz C = A.B é:

a)12
b) 11
c) 10
d) 9
\*e) inexistente