**Matrizes e Determinantes I**

Matriz de ordem m x n : Para os nossos propósitos, podemos considerar uma matriz como sendo uma tabela rectangular de números reais (ou complexos) dispostos em m linhas e n colunas. Diz-se então que a matriz tem ordem m x n (lê-se: ordem m por n)

Exemplos:

A = ( 1 0 2 -4 5) ® Uma linha e cinco colunas ( matriz de ordem 1 por 5 ou 1 x 5)



B é uma matriz de quatro linhas e uma coluna, portanto de ordem 4 x 1.

Notas:

1) se m = n , então dizemos que a matriz é quadrada de ordem n.

Exemplo:



A matriz X é uma matriz quadrada de ordem 3x3 , dita simplesmente de ordem 3 .

2) Uma matriz A de ordem m x n , pode ser indicada como A = (aij )mxn , onde aij é um elemento da linha i e coluna j da matriz.

Assim , por exemplo , na matriz X do exemplo anterior , temos a23= 2 , a31= 4 , a33 = 3 , a3,2 = 5 , etc.

3) Matriz Identidade de ordem n : In = ( aij)n x n onde aij = 1 se i = j e aij = 0 se i ¹ j .

Assim a matriz identidade de 2ª ordem ou seja de ordem 2x2 ou simplesmente de ordem 2 é:



A matriz identidade de 3ª ordem ou seja de ordem 3x3 ou simplesmente de ordem 3 é:


4) Transposta de um matriz A : é a matriz At obtida de A permutando-se as linhas pelas colunas e vice-versa.

Exemplo:



A matriz At é a matriz transposta da matriz A .

Notas:

4.1) se A = At , então dizemos que a matriz A é simétrica.

4.2) Se A = - At , dizemos que a matriz A é anti-simétrica.
É óbvio que as matrizes simétricas e anti-simétricas são quadradas .

4.3) sendo A uma matriz anti-simétrica , temos que A + At = **0** (matriz nula) .

Produto de matrizes

Para que exista o produto de duas matrizes A e B , o número de colunas de A , tem de ser igual ao número de linhas de B.

**Amxn x Bnxq= Cmxq**

Observe que se a matriz A tem ordem **m** x **n** e a matriz B tem ordem **n** x **q** , a matriz produto C tem ordem **m x q** .
Vamos mostrar o produto de matrizes com um exemplo:



Onde L1C1 é o produto escalar dos elementos da linha 1 da 1ª matriz pelos elementos da coluna1 da segunda matriz, obtido da seguinte forma:

L1C1 = 3.2 + 1.7 = 13. Analogamente, teríamos para os outros elementos:
L1C2 = 3.0 + 1.5 = 5
L1C3 = 3.3 + 1.8 = 17
L2C1 = 2.2 + 0.7 = 4
L2C2 = 2.0 + 0.5 = 0
L2C3 = 2.3 + 0.8 = 6
L3C1 = 4.2 + 6.7 = 50
L3C2 = 4.0 + 6.5 = 30
L3C3 = 4.3 + 6.8 = 60, e, portanto, a matriz produto será igual a:



Observe que o produto de uma matriz de ordem 3x2 por outra 2x3, resultou na matriz produto P
de ordem 3x3.
Nota: O produto de matrizes é uma operação não comutativa, ou seja: A x B ¹ B x A

DETERMINANTES

Entenderemos por determinante , como sendo um número ou uma função, associado a uma matriz quadrada , calculado de acordo com regras específicas .

**É importante observar , que só as matrizes quadradas possuem determinante .**

Regra para o cálculo de um determinante de 2ª ordem
Dada a matriz quadrada de ordem 2 a seguir:



* O determinante de A será indicado por det(A) e calculado da seguinte forma :
* det (A) = ½ A½ = ad - bc

Exemplo:



Ora, senx.senx + cosx.cosx = sen2x + cos2x = 1 ( Relação Fundamental da Trigonometria ) . Portanto, o determinante da matriz dada é igual à unidade.

Regra para o cálculo de um determinante de 3ª ordem ( Regra de SARRUS).

SARRUS (pronuncia-se Sarrí), cujo nome completo é Pierre Frederic SARRUS (1798 - 1861), foi professor na universidade francesa de Strasbourg. A regra de SARRUS, foi provavelmente escrita no ano de 1833.

Nota: São escassas, e eu diria, inexistentes, as informações sobre o Prof. SARRUS nos livros de Matemática do segundo grau, que apresentam (ou mais simplesmente apenas citam) o nome do professor, na forma REGRA DE SARRUS, para o cálculo dos determinantes de terceira ordem. Graças ao Prof. José Porto da Silveira - da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, pudemos disponibilizar a valiosa informação acima! O Prof. SARRUS, foi premiado pela Academia Francesa de Ciências, pela autoria de um trabalho que versava sobre as integrais múltiplas, assunto que vocês estudarão na disciplina Cálculo III, quando chegarem à Universidade.

Para o cálculo de um determinante de 3ª ordem pela Regra de Sarrus, proceda da seguinte maneira:

1 - Reescreva abaixo da 3ª linha do determinante, a 1ª e 2ª linhas do determinante.

2 - Efetue os produtos em "diagonal" , atribuindo sinais negativos para os resultados à esquerda e sinal positivo para os resultados à direita.

3 - Efetue a soma algébrica. O resultado encontrado será o determinante associado à matriz dada.

Exemplo:



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| .2 |   |   |   | 3 |   |   |   | 5 |
| .1 |   |   |   | 7 |   |   |   | 4 |

Portanto, o determinante procurado é o número real negativo .**- 77**.

**Principais propriedades dos determinantes**

P1) somente as matrizes quadradas possuem determinantes.

P2) o determinante de uma matriz e de sua transposta são iguais: det(A) = det( At ).

P3) o determinante que tem todos os elementos de uma fila iguais a zero , é nulo.
Obs: Chama-se FILA de um determinante, qualquer LINHA ou COLUNA.

P4) se trocarmos de posição duas filas paralelas de um determinante, ele muda de sinal.

P5) o determinante que tem duas filas paralelas iguais ou proporcionais, é nulo.

P6) multiplicando-se (ou dividindo-se) os elementos de uma fila por um número, o determinante fica multiplicado (ou dividido) por esse número.

P7) um determinante não se altera quando se substitui uma fila pela soma desta com uma fila paralela, multiplicada por um número real qualquer.

P8) determinante da matriz inversa : det( A-1)= 1/det(A) .

Se A-1 é a matriz inversa de A , então A . A-1 = A-1 . A = In , onde In é a matriz identidade de ordem n . Nestas condições , podemos afirmar que det(A.A-1) = det(In) e portanto igual a 1.
Logo , podemos também escrever det(A) . det(A-1) = 1 ;
logo , concluímos que: det(A-1) = 1 / det(A).

Notas:

1) se det(A) = 0 , não existe a matriz inversa A-1. Dizemos então que a matriz A é SINGULAR ou NÃO INVERSÍVEL .

2) se det A ¹ 0 , então a matriz inversa A-1 existe e é única . Dizemos então que a matriz A é INVERSÍVEL .

P9) Se todos os elementos situados de um mesmo lado da diagonal principal de uma matriz quadrada de ordem n , forem nulos (matriz triangular), o determinante é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

P10) Se A é matriz quadrada de ordem **n** e k Î R então **det(k.A) = kn . det A**

Exemplos:

1) Qual o determinante associado à matriz?



Observe que a 4ª linha da matriz é proporcional à 1ª linha (cada elemento da 4ª linha é obtido multiplicando os elementos da 1ª linha por 3). Portanto, pela propriedade P5 , o determinante da matriz dada é NULO.

2) Calcule o determinante:



Observe que a 2ª coluna é composta por zeros; FILA NULA Þ DETERMINANTE NULO , conforme propriedade P3 acima. Logo, D = 0.

3) Calcule o determinante:



Ora, pela propriedade P9 acima, temos: D = 2.5.9 = 90

**Exercícios propostos:**

1) As matrizes A e B , quadradas de ordem 3, são tais que B = 2.At , onde At  é a matriz transposta de A. Se o determinante de B é igual a 40 , então o determinante da matriz inversa de A é igual a:

\*a) 1/5
b) 5
c) 1/40
d) 1/20
e) 20

2) Seja a matriz A de ordem n onde aij = 2 para i = j e aij = 0 para i ¹ j .
Se det (3A) = 1296 , então n é igual a:
Resp: n = 4

3) Determine a soma dos elementos da diagonal principal da matriz A = ( aij )3 X 3 , onde
aij = i + j se i ³ j ou aij = i - j se i < j. Qual o determinante de A?
Resp: soma dos elementos da diagonal principal = 12 e determinante = 82

4) Se A = ( aij ) é matriz quadrada de ordem 3 tal que aij = i - j então podemos afirmar que o determinante da matriz 5 A é igual a:
Resp: zero